Théorème de Fourier-Plancherel

A REVOIR
x

Thm : Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt}\,dt$.
$\hat{f} \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

· Soit $\tilde{f} : x \mapsto \overline{f(-x)}$. Soit $g = f * \tilde{f}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}\,dy$ et $g(0) = \|f\|_2^2$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{\tilde{f}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-t)} e^{-ixt}\,dt = \overline{\hat{f}(x)}$ donc $\hat{g} = \widehat{f * \tilde{f}} = \hat{f}\,\hat{\tilde{f}} = |\hat{f}|^2$.

Par inégalité de Young ($\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$, $f \in L^p$, $g \in L^q$ et $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$) :
$\|g\|_1 \leq \|f\|_1 \|\tilde{f}\|_1$

Par propriété de régularisation ($\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), g est continue et
$\|g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|\tilde{f}\|_2$.

· Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_n(t) = e^{-|t|/n}$, et pour $x \in \mathbb{R}$:
$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \hat{\phi}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_-} e^{t/n - ixt}\,dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/n + ixt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n}{1 - inx} + \frac{n}{1 + inx}\right) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{1 + n^2 x^2}$

Or : $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\phi_n(t)|\,|e^{-iyt}|\,|g(-y)|\,dt\,dy = \|\phi_n\|_1 \|g\|_1 < \infty$
Donc par Fubini : $\varphi_n * g(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y) g(-y)\,dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} g(-y)\,dy\,dt$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)\,\overline{\hat{g}(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t) |\hat{f}(t)|^2\,dt.$$

· Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de g :
$\exists \eta > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(0)| < \varepsilon$.
$$|\varphi_n * g(0) - g(0)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(y)(g(-y) - g(0))\,dy\right| \leq \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(y)|g(-y) - g(0)|\,dy + \int_{|y| > \eta} \varphi_n(y)|g(-y) - g(0)|\,dy$$
$$\leq \varepsilon + 2\|g\|_\infty \int_{|y| > \eta} \varphi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varepsilon.$$
Donc pour n assez grand, $|\varphi_n * g(0) - g(0)| \leq 2\varepsilon$

· Ainsi, puisque $0 \leq \phi_n |\hat{f}|^2 \leq \phi_{n+1} |\hat{f}|^2$, par convergence monotone, $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n * g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2$
Donc $g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2$. i.e. $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_2$.

Thm : La transformée de Fourier sur $L_1 \cap L_2$ se prolonge en un isomorphisme, proportionnel à une isométrie, de $L^2 \to L^2$.

· $L_1 \cap L_2$ est dense dans L^2 ($\forall f \in L^2$, $(f_n = f \mathbb{1}_{[-n,n]}) \subset L^1 \cap L^2$ et $f_n \xrightarrow{L^2} f$ par CVD).
· Si $(f_n) \subset L^1 \cap L^2$ cv vers f ds L^2, alors $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \sqrt{2\pi}\,\|f_n - f_m\|_2$ donc $(\hat{f}_n)$ est de Cauchy dans L^2 complet, donc converge vers une limite notée $\hat{f}$.
Si $(g_n) \subset L^1 \cap L^2$ cv aussi vers f dans L^2, alors (h_n) définie par $h_{2n} = f_n$, $h_{2n+1} = g_n$ converge dans L^2 vers f : donc $(\hat{h}_n)$ est de Cauchy, donc convergente dans L^2.
Ainsi $(\hat{f}_n)$ et $(\hat{g}_n)$ ont même limite, i.e. $\hat{f}$ est indépendant de la suite choisie.

Puisque $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}_n\|_2$ donc à la limite $\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\hat{f}\|_2$.

- Si $f \in S(\mathbb{R})$, alors $\forall k, p \in \mathbb{N}$, $(it)^k \hat{f}^{(p)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \partial_x^k\left((-ix)^p f(x)\right) dx$.

donc $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

En particulier, $\hat{f} \in L^1$, donc par inversion de Fourier, $f(x) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\hat{f}}(-x)$.

Donc $S(\mathbb{R})$ est stable par transformée de Fourier.

- $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$ donc l'image de $\mathcal{F}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

Si $g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\exists (f_n) \in L^2(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} g$, en particulier $(\hat{f}_n)$, donc (f_n) est de Cauchy dans L^2 complet, donc converge dans L^2 vers f.

$f_n \xrightarrow{L^2} f$ donc par continuité, $\hat{f}_n \xrightarrow{L^2} \hat{f}$, donc par unicité de la limite, $g = \hat{f}$.

Donc $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ est dense et fermée dans L^2 : $\mathrm{Im}(\mathcal{F}) = L^2$